

# Tech-News 01/04 Folge 1 Fachgebiet : Stahlbeton

von  
Prof. Dr.-Ing. Peter Steidle  
Prüfingenieur für Baustatik VPI  
Kastenwörthstr. 17  
76287 Rheinstetten

## DIN 1045-1 Bemessung schlanker Druckglieder

### 1 Einführung

Die Tragfähigkeit von Druckgliedern wird umso mehr durch ihre Verformungen beeinflusst, je schlanker sie sind. Deshalb sind die Verformungen bei **schlanken** Druckgliedern bei der Schnittgrößenermittlung zu berücksichtigen (Theorie II. Ordnung) und es der Nachweis zu führen, dass unter Berücksichtigung der Tragwerksverformungen (und von Imperfektionen) ein stabiler Gleichgewichtszustand möglich ist, ohne dass die Querschnittstragfähigkeit an irgendeiner Stelle überschritten wird.

Aufgrund des nichtlinearen  $\sigma - \varepsilon$  - Verhaltens von Beton und der durch die Rissbildung und das Fließen der Bewehrung bedingten sprunghaften Änderung der Biegesteifigkeit ist dieser Nachweis bei Stahlbetonbauteilen für allgemeine Fälle nur numerisch, und i.d.R. wegen des damit verbundenen Aufwandes nur programmgesteuert möglich. Die Prinzipien und Anwendungsregeln der neuen DIN 1045-1 können unmittelbar als Grundlage zur Entwicklung entsprechender **Bemessungsprogramme** verwendet werden, welche in der Praxis sicherlich vorrangig Anwendung finden werden.

Für die **Handrechnung**, sei es zur Überprüfung programmgesteuerter Bemessungen oder zur unmittelbaren Anwendung, stehen jedoch auch weiterhin vereinfachende Näherungsverfahren bzw. Bemessungshilfen zur Verfügung, mit denen die Mehrzahl der Stützenbemessungen ausreichend genau durchgeführt werden kann. Nur diese sollen im Rahmen dieses Beitrags behandelt werden.

Für schlanke Einzeldruckglieder dürfen die Auswirkungen nach Theorie II. Ordnung vereinfachend nach dem **Modellstützenverfahren** ermittelt werden. Dieses Verfahren wird in **Abschnitt 5.4** vorgestellt.

Auf der Theorie des Modellstützenverfahrens aufbauend wurden alternativ hierzu Bemessungshilfsmittel entwickelt, welche die mathematischen Zusammenhänge numerisch wesentlich genauer erfassen. Diese Bemessungshilfsmittel sind die sog.  **$\mu$ -Nomogramme** und die sog. **e/h-Diagramme**, welche in **Abschnitt 5.5.1** und **5.5.2** beschrieben werden.

Für Nachweise am Gesamtragwerk verweist DIN 1045-1 auf das Heft 525 des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), welches in absehbarer Zeit erscheinen wird. Dieses Heft soll ähnlich wie die bekannten Hefte 220, 240 und 400 ergänzend zur Norm DIN 1045-1 weitere Erläuterungen, zusätzliche Anwendungsregeln, Hinweise und einige wichtige Hilfsmittel für die Bemessung enthalten.

## 2 Grundlagen

Grundsätzlich erbringt man bei den genannten Handrechenverfahren wie bisher beim Ersatzstabverfahren den Stabilitätsnachweis von einzelnen Druckgliedern eines Tragwerks losgelöst vom Gesamtsystem an Hand von Ersatzstäben. Im Unterschied zum Ersatzstabverfahren wird bei diesen Verfahren als Ersatzstab aber eine einseitig eingespannte, am anderen Ende frei verschiebliche Kragstütze gewählt (s. Bild 2). Die Länge  $l$  dieser „Modellstütze“ wird gleich der halben **Ersatzlänge  $l_0$**  gesetzt. Der Begriff Ersatzlänge löst nach DIN 1045-1 den bisherigen Begriff Knicklänge ab. Die Ersatzlänge  $l_0$  ist deshalb (wie bisher die Knicklänge) der Abstand der Wendepunkte in der Knickfigur (s. Bild 1). Sie wird berechnet aus der Stützenlänge  $l_{col}$  (i.d.R. die Stockwerkshöhe) und dem Knicklängenbeiwert  $\beta$ , der die Auswirkung des Gesamtsystems auf den Ersatzstab repräsentiert (s. dazu Abschnitt 5.2):

$$l_0 = \beta \cdot l_{col}$$

Hierbei ist die (Quer-) Verschieblichkeit der Lager von großer Bedeutung. Es ist zwischen **verschieblichen** und **unverschieblichen Systemen** zu unterscheiden (s. Abschnitt 3).

Die **Schlankheit** (oder der **Schlankheitsgrad**)  $\lambda$  dient als Maß für den Einfluss der Verformungen auf die Tragfähigkeit und errechnet sich bekanntermaßen zu:

$$\lambda = l_0 / i$$

mit 
$$i = \sqrt{\frac{I}{A_c}}$$

und  $I$       Flächenmoment 2. Grades,  
 $A_c$       Querschnittsfläche des Druckgliedes.

Die Schlankheit  $\lambda$  entscheidet zusammen mit dem bezogenen **Ausnutzungsgrad**  $v_{Ed}$  (als Maß für die Ausnutzung des Stützenquerschnitts infolge der Längsdruckkraft) darüber, ob auf eine Untersuchung am verformten System, also den Stabilitätsnachweis, verzichtet werden kann oder nicht (s. Abschnitt 5.1).

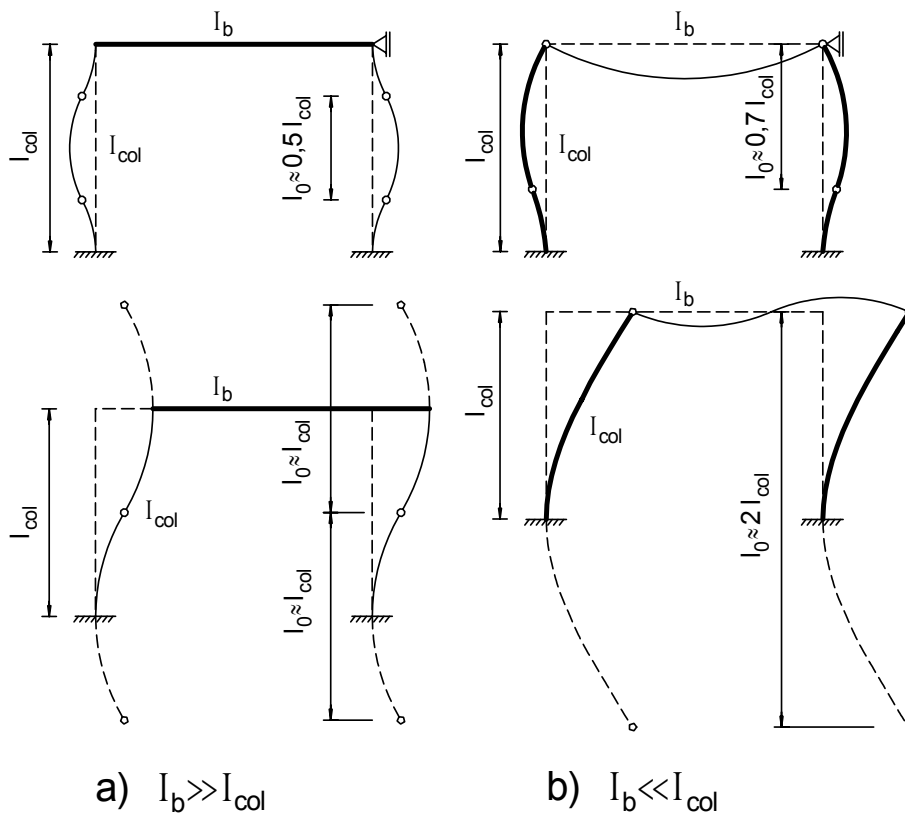


Bild 1: Ersatzlängen von Rahmenstielen für die Grenzfälle  
a) sehr steifer Riegel und b) sehr weicher Riegel (nach /5/)

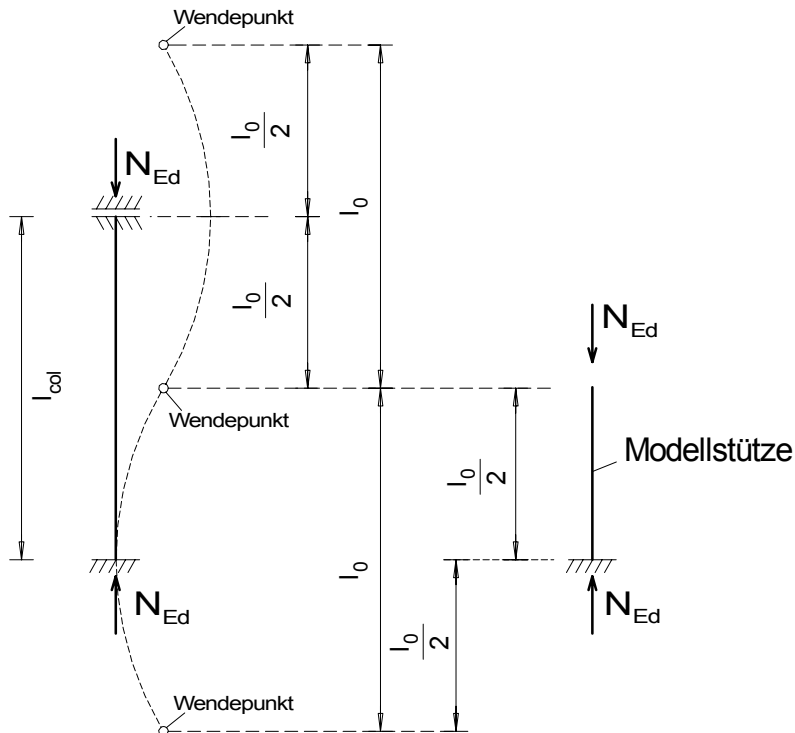


Bild 2: Druckstab mit Knickfigur, Ersatzlänge (Knicklänge)  $l_0$  und "Modellstütze" als Ersatzstab des Modellstützenverfahrens

### 3 Abgrenzung zwischen verschieblichen und unverschieblichen Systemen

Vor jeder Stabilitätsuntersuchung von Druckgliedern ist zu entscheiden, ob diese Bestandteil eines horizontal **verschieblichen** oder eines **unverschieblichen** Tragsystems sind.

Als **unverschieblich** gehalten dürfen Druckglieder in hinreichend ausgesteiften Tragsystemen angesehen werden. Ein Tragsystem ist i.a. dann ausreichend ausgesteift, wenn Wandscheiben, Treppenhaußschächte oder ähnliche Bauteile in ausreichender Zahl und annähernd symmetrisch angeordnet die lotrechten, aussteifenden Bauteile bilden, welche nur kleine vernachlässigbare Verdrehungen um die Bauwerksachse zulassen, und die Seitensteifigkeiten in beiden Richtungen nach DIN 1045-1, Gleichung 25, folgender Gleichung genügen:

$$\frac{1}{h_{\text{ges}}} \cdot \sqrt{\frac{E_{\text{cm}} \cdot I_{\text{c}}}{F_{\text{Ed}}}} \geq 1 / (0,2 + 0,1 m) \quad \text{für } m \leq 3$$

$$\geq 1 / 0,6 \quad \text{für } m \geq 4$$

Wenn obige Gleichung erfüllt wird, die lotrechten aussteifenden Bauteile aber nicht annähernd symmetrisch angeordnet sind oder nicht vernachlässigbare Verdrehungen um die Bauwerksachse zulassen, muss das Tragsystem zusätzlich ausreichend verdrehsteif sein, was durch die folgende Gleichung 26 nach DIN 1045-1 nachgewiesen wird:

$$\frac{1}{h_{\text{ges}}} \cdot \sqrt{\frac{E_{\text{cm}} \cdot I_{\omega}}{\sum_j F_{\text{Ed},j} \cdot r_j^2}} + \frac{1}{2,28} \cdot \sqrt{\frac{G_{\text{cm}} \cdot I_{\text{T}}}{\sum_j F_{\text{Ed},j} \cdot r_j^2}} \geq 1 / (0,2 + 0,1 m) \quad \text{für } m \leq 3$$

$$\geq 1 / 0,6 \quad \text{für } m \geq 4$$

Ein Tragsystem, das in diesem Sinne nicht als hinreichend ausgesteift angesehen werden kann, gilt als **verschieblich**.

Dabei sind:

m	Anzahl der Geschosse
$h_{\text{ges}}$	die Gesamthöhe des Tragwerks von der Fundamentoberkante oder einer nicht verformbaren Bezugsebene
$r_j$	der Abstand der Stütze j vom Schubmittelpunkt des Gesamtsystems
$F_{\text{Ed}}$	die Summe der Bemessungswerte der Vertikallasten mit $\gamma_F = 1,0$
$F_{\text{Ed},j}$	der Bemessungswert der Vertikallast der Stütze j mit $\gamma_F = 1,0$
$E_{\text{cm}} I_{\text{c}}$	die Summe der Nennbiegesteifigkeiten aller vertikalen aussteifenden Bauteile, die in der betrachteten Richtung wirken und den Anforderungen nach DIN 1045-1, 8.6.2(2) genügen. In den aussteifenden Bauteilen sollte die Betonzugspannung unter der maßgebenden Einwirkungskombination im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit nicht den Wert $f_{\text{ctm}}$ nach Tabelle 9 oder Tabelle 10 überschreiten. Wenn die Steifigkeit der aussteifenden Bauteile über ihre Höhe veränderlich ist, sollte eine Ersatzsteifigkeit eingeführt werden.
$E_{\text{cm}} I_{\omega}$	die Summe der Nennwölbsteifigkeiten aller gegen Verdrehung aussteifenden Bauteile
$G_{\text{cm}} \cdot I_{\text{T}}$	die Summe der Torsionssteifigkeiten aller gegen Verdrehung aussteifenden Bauteile (St. Venant'sche Torsionssteifigkeit)

## 4 Arten von Einzeldruckgliedern

Grundsätzlich erbringt man bei den hier behandelten Nachweisverfahren wie bisher beim Ersatzstabverfahren den Stabilitätsnachweis von einzelnen Druckgliedern eines Tragwerks losgelöst vom Gesamtsystem. Die DIN 1045-1 spricht in diesem Zusammenhang von Einzeldruckgliedern.

Einzeldruckglieder können sein:

- Einzelne Druckglieder, dazu zählen beispielsweise einzeln stehende Stützen (Bild 3a) oder schlanke aussteifende Bauteile eines verschieblichen Tragwerks (Bild 3c).
- Druckglieder als Teile eines Tragwerks, die jedoch für den Nachweis als Einzeldruckglieder betrachtet werden können. Beispielsweise sind dies gelenkig oder biegesteif angeschlossene Druckglieder in einem unverschieblichen oder unverschieblich ausgesteiften Tragwerk (Bilder 3b und d).

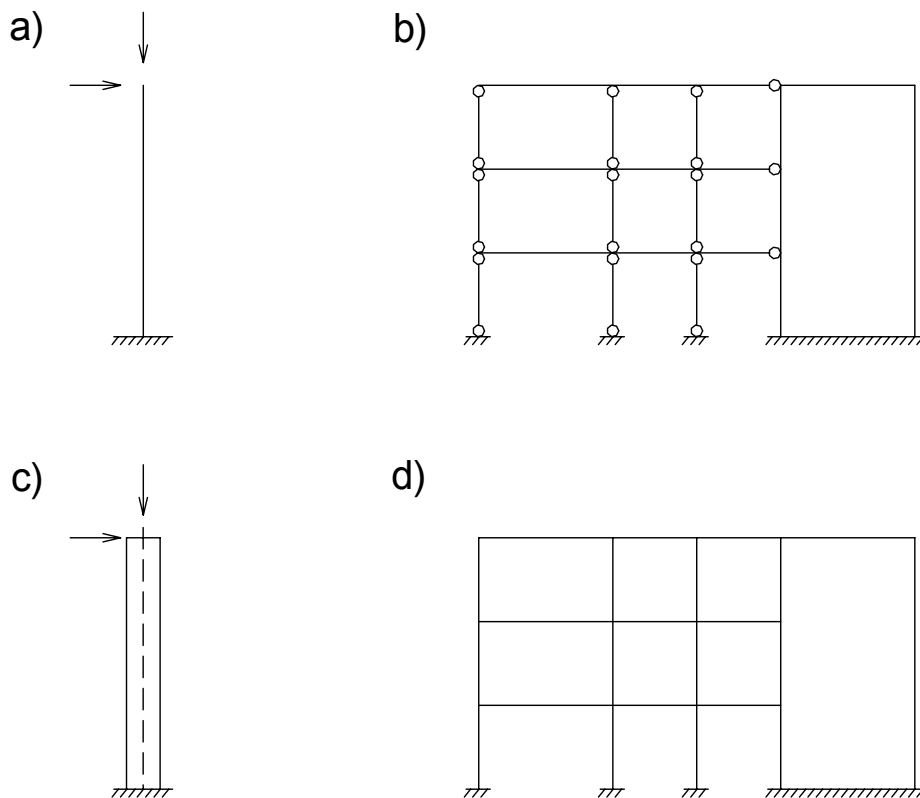


Bild 3: a) einzeln stehende Stütze  
b) gelenkig angeschlossene Druckglieder in einem unverschieblichen Tragwerk  
c) schlankes aussteifendes Bauteil, das als Einzeldruckglied betrachtet wird  
d) biegesteif angeschlossene Druckglieder in einem unverschieblichen Tragwerk (entspricht Bild 11 DIN 1045-1)

## 5 Bemessung von Einzeldruckgliedern

### 5.1 Verzicht auf eine Untersuchung am verformten System

Auf eine Untersuchung am verformten System nach Theorie II. Ordnung und damit auf den Stabilitätsnachweis darf verzichtet werden, wenn der Einfluss der Zusatzmomente gering ist. Nach DIN 1045-1, 8.6.1(1) ist dies der Fall, wenn die Auswirkung von Bauteilverformungen die Tragfähigkeit um nicht mehr als 10% verringert.

**Bei Einzeldruckgliedern** darf durch Vergleich der Schlankheit mit Grenzwerten entschieden werden, ob Auswirkungen nach Theorie II. Ordnung zu berücksichtigen sind. Schlank Einzeldruckglieder müssen nach Theorie II. Ordnung bemessen werden, bei gedrunenen Einzeldruckgliedern genügt die Regelbemessung. Einzeldruckglieder gelten als schlank, wenn folgende Grenzwerte der Schlankheit überschritten werden:

$$\lambda_{\max} = 25 \quad \text{für } |v_{\text{Ed}}| \geq 0,41 \quad (\text{Gleichung 27 DIN 1045 - 1})$$

$$\lambda_{\max} = 16 / \sqrt{|v_{\text{Ed}}|} \quad \text{für } |v_{\text{Ed}}| < 0,41 \quad (\text{Gleichung 28 DIN 1045 - 1})$$

Darin ist  $v_{\text{Ed}}$  der Ausnutzungsgrad als Maß für die Beanspruchung des Stützenquerschnitts infolge Längsdruckkraft. Dieser Wert errechnet sich zu:

$$v_{\text{Ed}} = \frac{N_{\text{Ed}}}{A_c \cdot f_{\text{cd}}} \quad (\text{Gleichung 29 DIN 1045 - 1})$$

mit  $N_{\text{Ed}}$  Bemessungswert der mittleren Längskraft des Einzeldruckglieds  
 $A_c$  Querschnittsfläche des Druckgliedes  
 $f_{\text{cd}}$  Bemessungswert der Betondruckfestigkeit

**Einzeldruckglieder in unverschieblichen Tragwerken** mit annähernd konstanter Längsdruckkraft, die zwischen den Stützenenden nicht durch Querlasten oder Momente beansprucht werden, brauchen nicht nach Theorie II. Ordnung untersucht werden, wenn ihre Schlankheit gleich oder kleiner dem Wert nach Gleichung 30 DIN 1045-1 ist:

$$\lambda_{\text{crit}} = 25 \cdot (2 - e_{01} / e_{02}) \quad (\text{Gleichung 30 DIN 1045 - 1})$$

mit  $e_{01}/e_{02}$  die jeweiligen Lastausmitten der Längskraft an den Stützenenden (s. Bild 7), mit  $|e_{01}| \leq |e_{02}|$

Für  $e_{01} = e_{02} = 0$  ist  $\lambda_{\text{crit}} = 25$  zu setzen.

Die Einzeldruckglieder müssen bei Anwendung der Gleichung 30 an beiden Stützenenden mindestens für die Schnittgrößen  $N_{\text{Ed}}$  und  $M_{\text{Ed}} \geq N_{\text{Ed}} \cdot h/20$  bemessen werden.

Für bewehrte Stützen schreibt die neue DIN 1045-1 keine zulässige Schlankheit mehr vor!

## 5.2 Ermittlung der Ersatzlänge $l_0$

Die Ersatzlänge (Knicklänge)  $l_0$  von Druckgliedern darf als Abstand der Wendepunkte der Knickfigur mit Hilfe der Elastizitätstheorie ermittelt werden.

Für verschiedene in der Praxis vorkommende Fälle sind in der Literatur Hilfsmittel zur Bestimmung der Ersatzlänge zusammengestellt. DIN 1045-1 verweist hierzu auf das Heft 525 des DAfStb. Auszugsweise sollen hier nur die Hilfsmittel zur Bestimmung der Knicklängen von Rahmenstielen, entnommen aus /1/, behandelt werden (Bild 4).

Mit dem Knicklängenbeiwert  $\beta$  aus den Nomogrammen Bild 4 ergeben sich die Ersatzlängen  $l_0$  aus der Stützenlänge  $l_{col}$  zu:

$$l_0 = \beta \cdot l_{col}$$

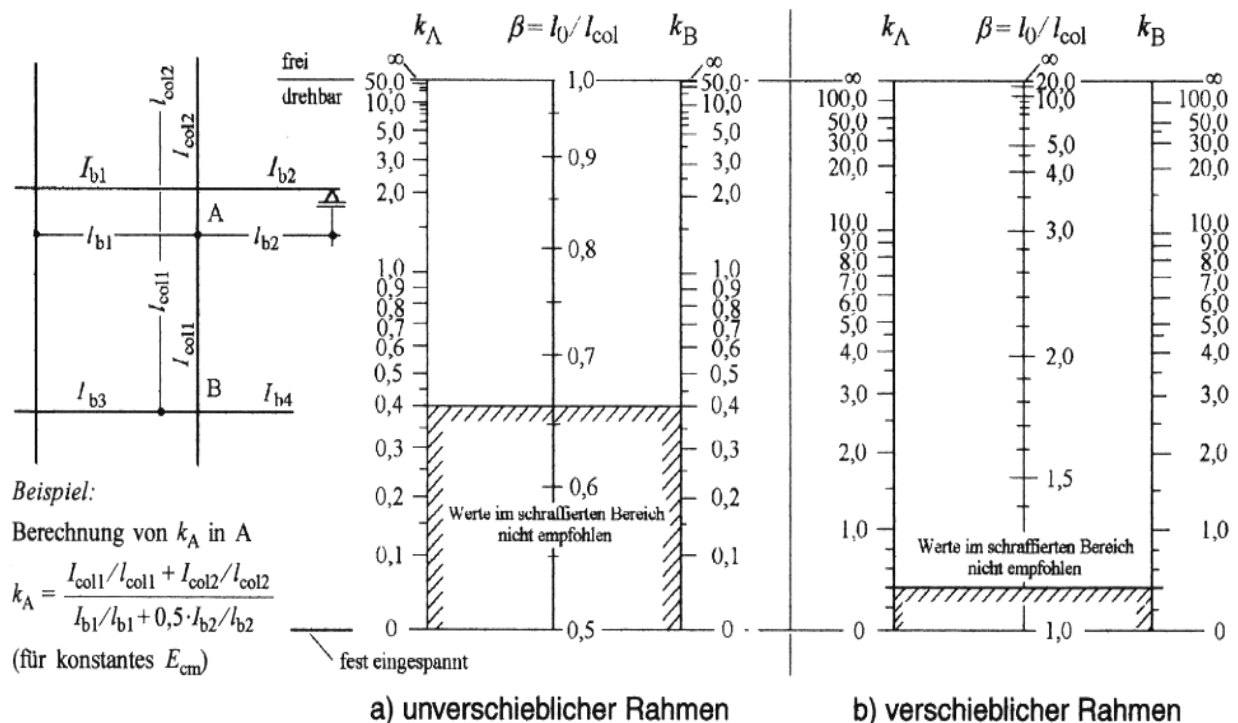


Bild 4: Nomogramm zur Ermittlung der Ersatzlänge  $l_0$  von Rahmenstielen (entnommen aus /1/)

Der Knicklängenbeiwert  $\beta$  und damit die Ersatzlänge  $l_0$  von Rahmenstielen hängen demnach ab von

- der Lagerung der Stabenden (gelenkig oder in benachbarte Bauteile eingespannt)
- der Verschieblichkeit der Stabenden.

Die Einspannung des Druckgliedes in benachbarte Bauteile wird in den Nomogrammen Bild 4 durch das Steifigkeitsverhältnis  $k_A$  bzw.  $k_B$  erfasst.

$$k_A \text{ oder } k_B = \frac{\sum \frac{E_{cm} \cdot I_{col}}{l_{col}}}{\sum \frac{E_{cm} \cdot \alpha_b \cdot I_b}{l_b}}$$

Eine Abminderung der Riegelsteifigkeit  $I_b$  wird durch den Beiwert  $\alpha_b$  vorgenommen, wenn das abliegende Riegelende nicht eingespannt ist ( $\alpha_b = 0,5$  frei drehbar gelagert;  $\alpha_b = 0$  Kragbalken). Bei monolithischer Verbindung von Stütze und Riegel ist  $\alpha_b = 1,0$ .

Da eine starre Stabendeinspannung  $k \rightarrow 0$  baupraktisch nicht realisierbar ist, sollten Verhältniszahlen  $k < 0,4$  grundsätzlich nicht angewendet werden.

Die Anwendung des Nomogramms für verschiebliche Rahmen ist nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll!

### 5.3 Imperfektionen

Strukturelle und geometrische Imperfektionen vergrößern ähnlich wie Tragwerksverformungen die Beanspruchung von Druckgliedern. Solche Imperfektionen können sein:

- Ungewollte exzentrische Lasteinleitung,
- Nicht erfasste Einspannungen von Balken oder Platten in Stützen,
- Ungerade Stützenachse,
- Unsymmetrische Bewehrung,
- Unsicherheiten bei den Auswirkungen der Theorie II. Ordnung.

Sie werden beim Nachweis nach Theorie II. Ordnung vereinfacht zusammen als sog. geometrische Ersatzimperfektionen in Form einer ungewollten oder zusätzlichen Schiefstellung oder als Lastausmitte festgelegt.

Für Einzeldruckglieder ist nach DIN 1045-1, 8.6.4(1) eine zusätzliche Lastausmitte anzusetzen von:

$$e_a = \alpha_{a1} \cdot l_0 / 2 \quad (\text{Gleichung 33 DIN 1045-1})$$

mit  $l_0$  Ersatzlänge des Einzeldruckglieds  
 $\alpha_{a1}$  Schiefstellung gegen die Sollachse nach Gleichung (4) mit  $h_{\text{ges}} = l_{\text{col}}$

und

$$\alpha_{a1} = \frac{1}{100\sqrt{h_{\text{ges}}}} \leq \frac{1}{200} \quad (\text{Gleichung 4 DIN 1045 – 1})$$

## 5.4 Modellstützenverfahren

### 5.4.1 Grundlagen

Für schlanke Einzeldruckglieder dürfen die Auswirkungen nach Theorie II. Ordnung vereinfachend nach dem Modellstützenverfahren ermittelt werden.

Nach DIN 1045-1, 8.6.5(3) ist eine Modellstütze eine Kragstütze mit der Länge  $l=l_0/2$ , die

- am Stützenfuß eingespannt und am Stützenkopf frei verschieblich ist (Bild 5a) und
- unter der Wirkung von Längskräften und Momenten eine einfach gekrümmte Verformungsfigur aufweist, wobei am Stützenfuß das maximale Moment auftritt (Bild 5b).

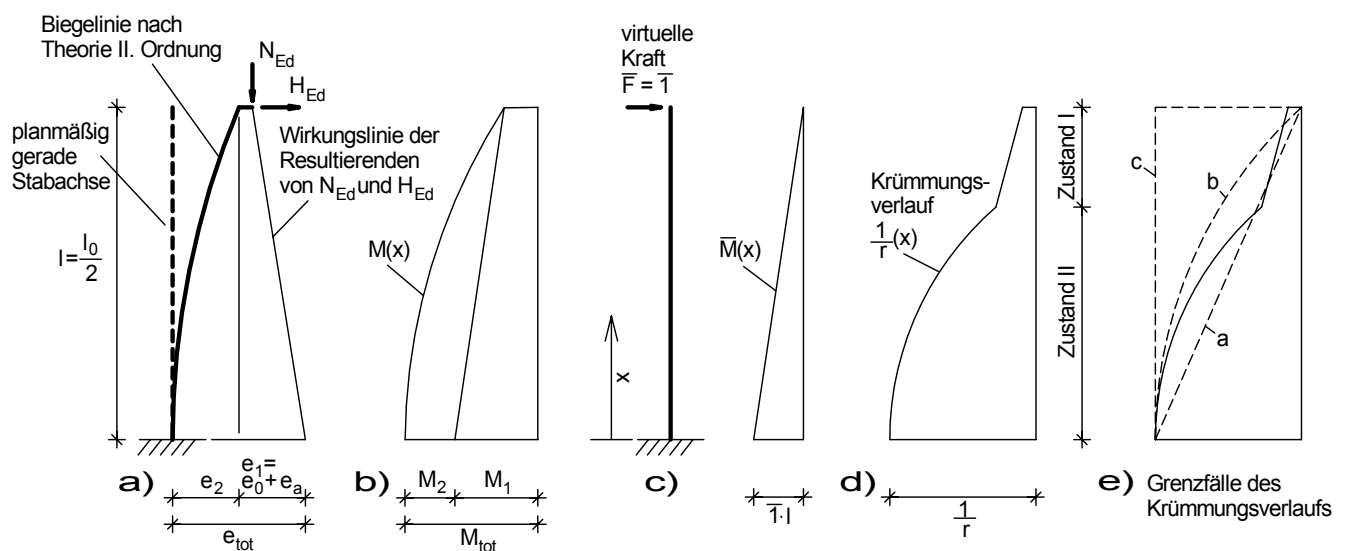


Bild 5: Modellstütze; Verformungen, Momentenbeanspruchung und Krümmungsverlauf

Die Gesamtausmitte der Modellstütze ergibt sich bei Einzeldruckgliedern mit konstantem Beton- und Bewehrungsquerschnitt am Fuß (Bild 5a) zu:

$$e_{\text{tot}} = e_1 + e_2 \quad (\text{Gleichung 34 DIN 1045-1})$$

mit

$$e_1 = e_0 + e_a \quad (\text{Gleichung 35 DIN 1045-1})$$

Dabei sind:

- $e_0$  planmäßige Lastausmitte nach Theorie I. Ordnung =  $M_{\text{Ed}0} / N_{\text{Ed}}$
- $M_{\text{Ed}0}$  Bemessungswert des aufzunehmenden Biegemoments nach Theorie I. Ordnung
- $N_{\text{Ed}}$  Bemessungswert der aufzunehmenden Längsdruckkraft
- $e_a$  zusätzliche ungewollte Lastausmitte nach Gleichung 33 DIN 1045-1
- $e_2$  zusätzliche Lastausmitte infolge Auswirkungen nach Theorie II. Ordnung

Die Grundidee des Modellstützenverfahrens ist, die Stützenbemessung nach Theorie II. Ordnung in eine Querschnittsbemessung (am Fuß) zu überführen, wobei ein geeigneter Verlauf der Krümmung ( $1/r(x)$ ) gewählt wird und der Größtwert der Krümmung am Fuß  $1/r$  aus dem Fließzustand abgeleitet wird (s. später Abschnitt 5.4.3).

Es gelingt dann, die Gleichung für das angreifende (äußere) Moment nach Theorie II. Ordnung

$$M_{Ed,tot} = M_1 + M_2 = M_1 + |N_{Ed}| \cdot e_2$$

in eine Geradengleichung zu überführen

$$tot \mu_{Ed} = \mu_{Ed1} + 0,1 \cdot |V_{Ed}| \cdot l_0^2 \cdot (1/r),$$

welche in einem Momenten-Krümmungsdiagramm dargestellt werden kann (s. Bild 6).  $\mu_{Ed1}$  ist der Abszissenabschnitt und  $0,1 \cdot |V_{Ed}| \cdot l_0^2 \cdot (1/r)$  ist die Steigung der Gerade.

Diese Beziehung für das äußere Moment wird direkt dem widerstehenden (inneren) Moment in Form der Momenten-Krümmungsbeziehung des Fußpunktes gegenübergestellt.

Im Gleichgewichtszustand sind inneres und äußeres Moment gleich. Existiert ein Schnittpunkt der Geraden mit der nichtlinearen Momenten-Krümmungsbeziehung des Fußpunktes, ist ein Gleichgewichtszustand möglich. Bei der Bemessung wird die Gerade für das äußere Moment die Momenten-Krümmungsbeziehung (inneres Moment) gerade berühren, häufig im Knickpunkt bei Erreichen der Streckgrenze in der Bewehrung. Ist kein Schnittpunkt denkbar, weil das äußere Moment mit der Krümmung ( $1/r$ ) schneller anwächst als das innere Moment, ist kein Gleichgewichtszustand möglich.

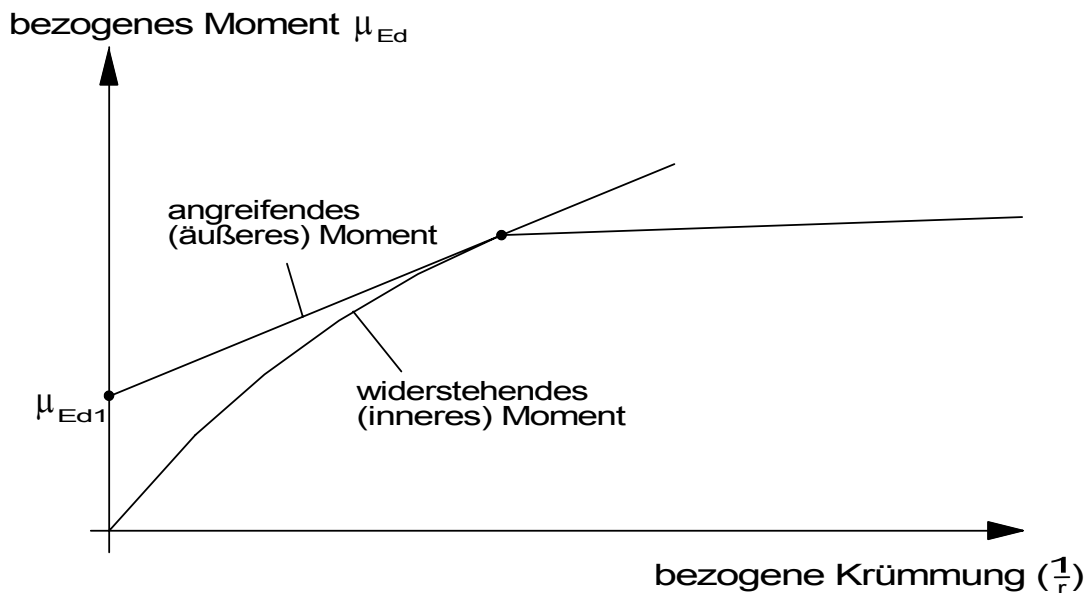


Bild 6: Verlauf des inneren und des äußeren Moments einer Modellstütze als Funktion der maximalen Krümmung  $1/r$  am Fußpunkt

## 5.4.2 planmäßige Lastausmitte nach Theorie I. Ordnung

Die planmäßige Lastausmitte  $e_0$  im kritischen Querschnitt wird **allgemein** ermittelt aus:

$$e_0 = M_{Ed0} / N_{Ed}$$

**Für Druckglieder in unverschieblichen Rahmentragwerken** mit konstantem Querschnitt ohne Querlasten (d.h. bei linearem Momentenverlauf) darf die planmäßige Lastausmitte  $e_0$  nach DIN 1045-1, 8.6.5(6) vereinfachend nach den Gleichungen 36 und 37 angesetzt werden; der größere Wert ist maßgebend.

$$e_0 = 0,6 \cdot e_{02} + 0,4 \cdot e_{01} \quad (\text{Gleichung 36 DIN 1045-1})$$

$$e_0 = 0,4 \cdot e_{02} \quad (\text{Gleichung 37 DIN 1045-1})$$

Dabei sind (s. Bild 7):

$e_{01}$ ,  $e_{02}$  die jeweilige Ausmitte der Längsdruckkraft nach Theorie I. Ordnung an den beiden Stützenenden mit  $|e_{02}| \geq |e_{01}|$

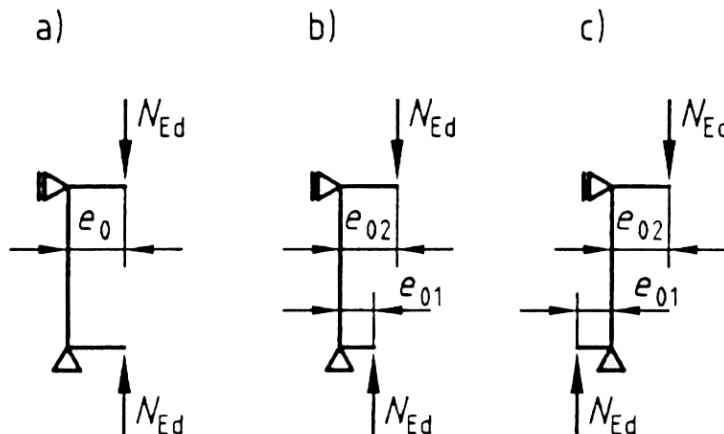


Bild 7: planmäßige Lastausmitte  $e_0$  für Druckglieder in unverschieblichen Rahmentragwerken

- Druckglied mit gleicher Lastausmitte an beiden Enden
  - Druckglied mit unterschiedlicher Lastausmitte gleichen Vorzeichens an beiden Enden
  - Druckglied mit unterschiedlicher Lastausmitte unterschiedlichen Vorzeichens an beiden Enden
- (Bild 13 aus DIN 1045-1)

### 5.4.3 zusätzliche Lastausmitte nach Theorie II. Ordnung

Für den Verlauf der Krümmung sind die im Bild 5e dargestellten Grenzfälle denkbar:

- a) Dreieckförmiger Krümmungsverlauf (H-Last groß)
- b) Parabelförmiger Krümmungsverlauf (Lastausmitte  $e_2/h$  groß / großes  $\lambda$ )
- c) Rechteckförmiger Krümmungsverlauf (H-Last und Lastausmitte  $e_2/h$  klein bzw. gestaffelte Bewehrung)

Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit (s. dazu Bild 5c) kann die Kopfverformung  $e_2$  der Modellstütze berechnet werden aus:

$$\begin{aligned} e_2 &= \int \bar{M}(x) \cdot M(x) / EI \cdot dx \\ &= \int \bar{M}(x) \cdot (1/r)(x) \cdot dx \\ &= K \cdot (\bar{1} \cdot l) \cdot (1/r) \cdot l \end{aligned}$$

Der Faktor K nimmt je nach Grenzfall a) bis c) unterschiedliche Werte an:

- a) Dreieckförmiger Krümmungsverlauf  $K = 1/3$
- b) Parabelförmiger Krümmungsverlauf  $K = 5/12$
- c) Rechteckförmiger Krümmungsverlauf  $K = 1/2$

Wird l durch  $l_0/2$  ersetzt, ergibt sich:

$$e_2 = \bar{K} \cdot (1/r) \cdot l_0^2$$

$\bar{K}$  wird dann:

- a) Dreieckförmiger Krümmungsverlauf  $\bar{K} = 1/12$
- b) Parabelförmiger Krümmungsverlauf  $\bar{K} = 5/48 = 1/9,6$
- c) Rechteckförmiger Krümmungsverlauf  $\bar{K} = 1/8$

Nach DIN 1045-1, 8.6.5(8), darf die maximale Auslenkung, die der zusätzlichen Auslenkung  $e_2$  entspricht, angenommen werden zu:

$$e_2 = K_1 \cdot (1/r) \cdot l_0^2 / 10$$

Dabei sind:

$l_0$  Ersatzlänge der Stütze  
(1/r) Krümmung im kritischen Querschnitt

$K_1 = \lambda/10 - 2,5$  für  $25 \leq \lambda \leq 35$   
 $= 1$  für  $\lambda > 35$

$K_1$  entspricht damit für  $\lambda > 35$  etwa Fall b), annähernd parabelförmiger Krümmungsverlauf. Für  $25 \leq \lambda \leq 35$  wurde der Wert  $K_1$  in Abhängigkeit von  $\lambda$  variabel definiert, um den Übergang von den nachweisfreien Bauteilen mit  $\lambda \leq 25$  zu den schlanken Bauteilen  $\lambda > 35$  gleitend zu gestalten.

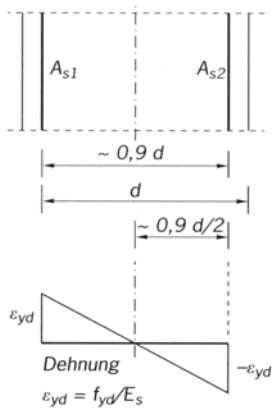


Bild 8: Dehnungsbild bei Erreichen der Fließgrenze der Zug- und Druckbewehrung (nach /3/)

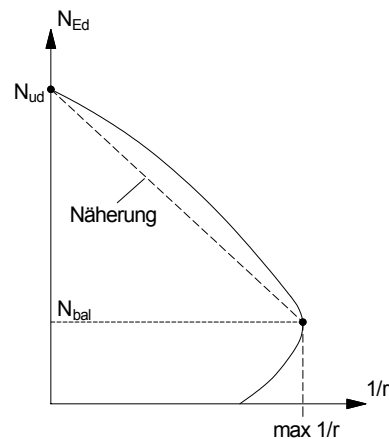


Bild 9: Prinzipieller Krümmungsverlauf  $1/r$  in Abhängigkeit von der Längsdruckkraft  $N_{Ed}$  (nach /3/)

Bei einer Vielzahl der baupraktisch relevanten Fälle stellt sich im kritischen Querschnitt der Modellstütze eine Dehnungsverteilung ein, bei der in der Stützenbewehrung die Streckgrenze  $f_{yd}$  auf der Zug- und auf der Druckseite erreicht wird (Bild 8). Die Dehnung in den (symmetrischen) Bewehrungen  $A_{s1}$  und  $A_{s2}$  ergibt sich dann zu  $|\varepsilon_{yd}| = f_{yd} / E_s$ .

Damit ergibt sich die maßgebende Krümmung  $1/r$  am Fußpunkt bei einem Abstand der Bewehrungen von etwa  $0,9 \cdot d$  maximal zu

$$\max \frac{1}{r} \approx \frac{\varepsilon_{yd}}{0,9 \cdot d / 2} = 2 \cdot \varepsilon_{yd} / (0,9 \cdot d)$$

Diese rechnerisch größte Krümmung stellt sich bei Rechteckquerschnitten mit symmetrischer Bewehrung bei Zugversagen und einer Längsdruckkraft  $N_{bal} \approx (-0,4 \cdot f_{cd} \cdot A_c)$  ein (s. Bild 9). Im Druckversagensbereich, d.h. mit zunehmendem  $|N_{Ed}| > |N_{bal}|$ , nimmt die Krümmung ab und erreicht bei  $N_{Ed} = N_{ud}$  den Wert 0. Die Abnahme der Krümmung ( $1/r$ ) bei größeren Längsdruckkräften  $N_{Ed}$  kann durch einen Korrekturfaktor  $K_2$  erfasst werden, der eine geradlinige Annäherung des tatsächlichen Krümmungsverlaufes darstellt (s. Bild 9).

Nach DIN 1045-1 darf deshalb die Krümmung ( $1/r$ ) im kritischen Querschnitt näherungsweise ermittelt werden zu:

$$\frac{1}{r} = 2 \cdot K_2 \cdot \varepsilon_{yd} / (0,9 \cdot d)$$

(Gleichung 39 DIN 1045 – 1)

mit

$$K_2 = (N_{ud} - N_{Ed}) / (N_{ud} - N_{bal}) \leq 1$$

(Gleichung 40 DIN 1045-1)

und

$$N_{ud} = - (f_{cd} \cdot A_c + f_{yd} \cdot A_s)$$

$$N_{bal} = - (0,4 \cdot f_{cd} \cdot A_c)$$

Weil  $N_{ud}$  von der zunächst nicht bekannten Bewehrung  $A_s$  abhängt, ist bei Druckversagen ein iteratives Vorgehen erforderlich. Die Annahme  $K_2 = 1$  liegt jedoch stets auf der sicheren Seite. Bei Zugversagen ( $|N_{Ed}| < |N_{bal}|$ ) ist  $K_2 = \text{konstant} = 1$ , hier erübrigt sich eine Iteration.

#### **5.4.4 Anwendungsbereich**

Das Modellstützenverfahren gilt für Einzeldruckglieder mit rechteckigem oder rundem Querschnitt, bei denen die Lastausmitte nach Theorie I. Ordnung die Bedingung  $e_0/h \geq 0,1$  (mit  $h$  = Dicke des Querschnitts in der betrachteten Ebene) erfüllt. Für andere Querschnittsformen und für Lastausmitten  $e_0/h < 0,1$  ist das Verfahren auch anwendbar, jedoch sind andere Näherungen geeigneter, weil das Modellstützenverfahren gegenüber exakten oder genaueren Bemessungsverfahren mit abnehmender Lastausmitte  $e_0/h$  und zunehmender Schlankheit  $l_0/h$  z.T. erheblich, allerdings auf der sicheren Seite liegend, abweicht.

Auch hier verweist die DIN 1045-1 auf das Heft 525.

## 5.5 Bemessungshilfsmittel

Auf der Theorie des Modellstützenverfahrens aufbauend wurden alternativ hierzu Bemessungshilfsmittel entwickelt, welche die mathematischen Zusammenhänge numerisch wesentlich genauer erfassen. Diese Bemessungshilfsmittel sind die sog.  $\mu$ -Nomogramme und die sog.  $e/h$ -Diagramme, welche z.B. in /2/ abgedruckt und dort auch eingehend beschrieben sind.

### 5.4.1 $\mu$ -Nomogramme

Eingangsparameter sind:

$\mu_{Ed1}$	bezogenes Moment nach Theorie I. Ordnung, aber einschl. der zusätzlichen Ausmitte $e_a$ infolge der Auswirkungen von Imperfektionen und einschließlich der ggf. zu berücksichtigenden Ausmitte $e_c$ infolge Kriechen
$l_0/h$	bezogene Stützenlänge
$v_{Ed}$	bezogene Längskraft

Handhabung:

Die Ablesegerade 1 wird durch  $\mu_{Ed1}$  und  $l_0/h$  festgelegt. Im Schnittpunkt mit der Linie 2 für  $v_{Ed}$  wird die Linie 3 für den erforderlichen Bewehrungsgrad  $\omega_{erf}$  gefunden. Mit Linie 4 kann das bezogene Gesamtmoment  $\mu_{Ed,tot}$  nach Theorie II. Ordnung abgelesen werden.

### 5.4.2 $e/h$ -Diagramme

Eingangsparameter sind:

$e_1/h$	bezogene Lastausmitte $e_1/h$ mit $e_1 = e_0 + e_a$ , also einschl. der zusätzlichen Ausmitte $e_a$ infolge der Auswirkungen von Imperfektionen und einschließlich der ggf. zu berücksichtigenden Ausmitte $e_c$ infolge Kriechen
$l_0/h$	bezogene Stützenlänge
$v_{Ed}$	bezogene Längskraft

Handhabung:

Die Linie 1 wird durch  $e_1/h = 0$  und  $l_0/h$  festgelegt. Parallel hierzu ergibt Linie 2 (durch  $e_1/h$ ) im Schnittpunkt mit der Linie für  $v_{Ed}$  die bezogene Gesamtausmitte  $e_{tot}/h$  (Linie 3). Im rechten Teil des Diagramms wird im Schnittpunkt der Linie 3 mit der Linie für  $v_{Ed}$  die Linie 4 für den erforderlichen Bewehrungsgrad  $\omega_{erf}$  gefunden.

## 5.6 Einfluss des Kriechens

Das Kriechen vergrößert die Stabauslenkungen und führt, insbesondere bei Stäben mit beidseitig gleichen Endausmitten, zu einem Anwachsen der maßgebenden Biegemomente, was bei kleinen Lastausmitten und großen Schlankheiten berücksichtigt werden muss.

Dagegen dürfen Kriechauswirkungen nach DIN 1045-1, 8.6.3(5) in der Regel vernachlässigt werden, wenn die Stützen an beiden Enden monolithisch mit lastabtragenden Bauteilen verbunden sind oder wenn bei verschieblichen Tragwerken die Schlankheit des Druckglieds  $\lambda < 50$  und gleichzeitig die bezogene Lastausmitte  $e_0/h < 2$  ist.

Entsprechend /2/ reicht es für eine Abschätzung oft aus, die Zusatzausmitte  $e_2$  infolge Verformung mit dem Beiwert

$$\begin{aligned} K_c &= 1 + \frac{M_{Ed,c}}{M_{Ed,1}} = 1 + \frac{M_{Gd,0}}{M_{(G+Q)d,0+a}} \\ &= 1 + \frac{M_{Gd,0}}{M_{Ed,1}} \end{aligned}$$

zu vergrößern. Das Verhältnis der Momente aus planmäßigem Bemessungswert infolge ständiger Einwirkungen  $M_{Gd,0}$  und dem Bemessungswert aus ständigen und veränderlichen Einwirkungen einschließlich der Auswirkungen von Imperfektionen  $M_{Ed,1}$  ist Null, wenn unter planmäßigen Einwirkungen keine ständigen Momente vorhanden sind. Es nähert sich dem Verhältnis Eins, wenn nur Momente aus ständigen Einwirkungen vorhanden sind. Entsprechend nimmt der Beiwert Werte  $1 \leq K_c \leq 2$  an.

Bei Anwendung der Bemessungshilfsmittel  $\mu$ -Nomogramme oder  $e/h$ -Diagramme können die Kriechauswirkungen durch eine Vergrößerung der bezogenen Stützenlänge  $l_0/h$  mit dem Beiwert  $\sqrt{K_c}$  berücksichtigt werden:

$$l_{0,c} / h = \sqrt{K_c} \cdot l_0 / h$$

## 5.7 Ausweichen nach zwei Richtungen

Für Stützen, die nach zwei Richtungen ausweichen können, ist i.a. ein Nachweis für schiefe Biegung mit Längsdruck zu führen.

Auszug aus DIN 1045-1, 8.6.6:

- (1) Ist es erforderlich, das Tragverhalten in jeder der beiden Hauptachsenrichtungen zu betrachten, muss der kritische Querschnitt für beide Fälle nachgewiesen werden. Für diese beiden Richtungen können an den Enden des Bauteils unterschiedliche Randbedingungen vorliegen. Diese Bedingungen müssen in einer geeigneten Weise erfasst werden.

Bei Druckgliedern mit Rechteckquerschnitt dürfen näherungsweise Nachweise getrennt für jede der beiden Hauptachsenrichtungen geführt werden, wenn das Verhältnis der kleineren bezogenen planmäßigen Lastausmitte zur größeren den Wert 0,2 nicht überschreitet, d.h. wenn die Längskraft innerhalb der schraffierten Bereiche (s. Bild 10; Bild 14, DIN 1045-1) angreift.

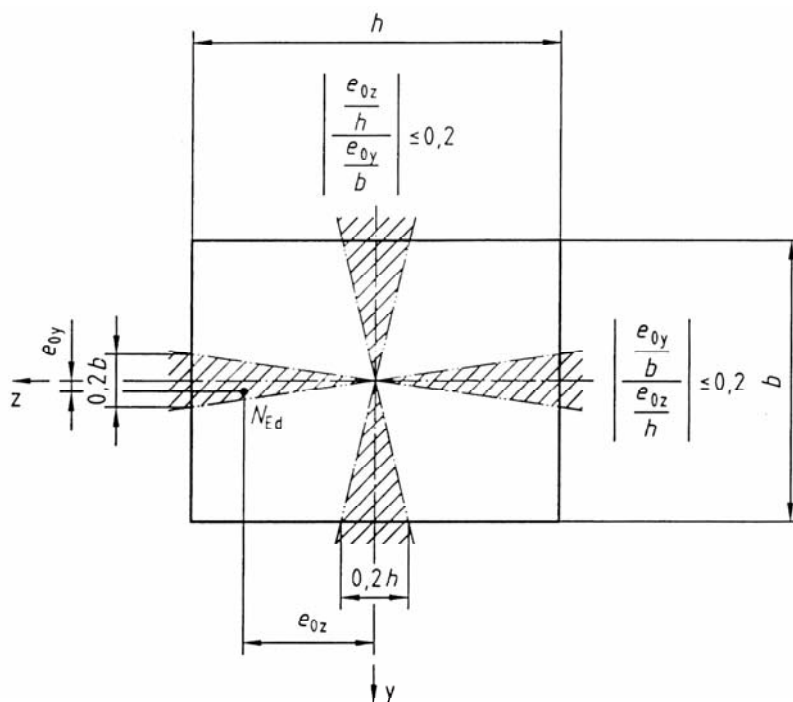


Bild 10: Grenzen der Lage von  $N_{Ed}$  für getrennte Nachweise in Richtung der beiden Hauptachsen (Bild 14 aus DIN 1045-1)

Mit abnehmendem Verhältnis  $b/h$  der Querschnittsseiten  $b$  und  $h$  tritt die Verformung mit zunehmender bezogener Lastausmitte  $e_{0z}/h$  um so mehr quer zur Lastebene in Richtung der kleineren Querschnittsseite  $b$  auf. Damit auch in einem solchen Fall der getrennte Nachweis in Richtung der kürzeren Querschnittsseite  $b$  einigermaßen zutreffend ist, muss für  $e_{0z}/h > 0,2$  das Aufreißen des Querschnitts berücksichtigt werden. Hierzu gibt DIN 1045-1 mit Gleichung 43 und Bild 15 Hinweise zur Durchführung des Nachweises der Biegung für die schwächere Hauptachse des Querschnitts (s. dort).

## 6 Nachweise am Gesamttragwerk

Für Nachweise am Gesamttragwerk verweist die DIN 1045-1 auf das Heft 525.

## 7 Mindest- und Höchstwerte der Längsbewehrung von Stützen

Konstruktionsregeln für Stützen finden sich in DIN 1045-1, Abschnitt 13.5.

Unter anderem wird ein Mindestwert des Längsbewehrungsquerschnitts festgelegt:

$$A_{s,\min} = 0,15 \cdot \frac{N_{Sd}}{f_{yd}} \quad (\text{Gleichung 155 DIN 1045 - 1})$$

Ebenso wird ein Maximalwert des Längsbewehrungsquerschnitts festgelegt. Der gesamte Bewehrungsquerschnitt  $A_{s,\max}$  darf, auch im Bereich von Übergreifungsstößen, den Maximalwert von  $0,09 \cdot A_c$  nicht überschreiten:

$$A_{s,\max} \leq 0,09 \cdot A_c \quad (\text{DIN 1045-1, 13.5.2(2) })$$